## 第一章

1. （1）若且，则；

（2）若，则对任意整数有。

**证明：**（1）且，因此有。

（2），则



因此有。

1. 若有整数根，则。一般地，若有整数根，则。

**证明：**，所以有。同理可证。

1. 若且，则。

**证明：**由于，所以有，又因为且，所以且，因此。

1. 若，及，则。

**提示：**类似于上一题，可先根据，证，然后再根据及去证。

1. 设满足是两个整数。证明：。

**证明：**，又，所以。

1. （1）若，则至少有一个成立。

（2）若，则至少有一个成立。

（3）若，试问或必有一个成立吗？

**证明：**（1）若，则是奇数，不妨设，则有



两边同乘以b，可得



由于，所以2整除上述等式的左边，因此。

（2）若，则，即存在整数使得，

两边同乘以b，可得



由于，所以2整除上述等式的左边，因此。

（3）不一定。例如，有，但14不整除2和7。

1. 证明：对任意整数有

（1）；

证明：三个连续整数中，至少有一个被2整除，也至少有一个被3整除。

若n，n+1，n+2中有一个既能被2整除又能被3整除，则该数能被6整除，结论成立；

若2和3分别整除不同的两个数 ，不妨设，，则有，结论也成立。

（2）；

证明：三个连续整数中，一定存在两个连续偶数不妨设为n和n+2。两个连续偶数中必有一个被4整除，设，则有，即。同理可证，当n+1和n+3是两个连续偶数的时候，结论同样成立。

（3）；

证明：根据第（2）小题结论，有，又因为四个连续整数中，至少有一个被3整除，因此有。又，所以有。

（4）若，则及；

证明：因为，所以为两个连续偶数，两个连续偶数中必有一个被4整除，不妨设，则有，即

对于三个连续，必有一个被3整除，所以，又，由于，根据推论1.2.2（2）可得。

（5）若，则；

证明：，则根据第（4）小题结论有。对于三个连续，必有一个被3整除，所以，而，所以，由于，根据推论1.2.2（2）可得。因此有。

（6）；

证明：是3个连续整数的乘积，类似于第（1）小题，可证。

（7）；

证明：，由第（6）小题结论可知。如果有5的倍数，则结论得证，若没有，则n必然是5k+2和5k+3两种形式，可将其代入，可知一定是5的倍数，即。结论得证。

（8）；

证明：。由第（6）小题结论可知。如果有7的倍数，则结论得证，若没有，则n必然是7k+2、7k+3、7k+4、7k+5四种形式，可将其代入，可知一定是7的倍数，即。结论得证。

（9）证明对任意整数，是整数。

证明：



由于中必有一个是3的倍数，如果有5的倍数，则结论得证，若没有，则n必然是5k+2和5k+3两种形式，可将其代入，可知一定是5的倍数。结论得证。

1. 证明：形如的素数有无穷多个。

证明：首先证明形如的整数必有一个形如的素因子。

设，（1）若n是素数，则结论成立。

（2）若n是合数，则n一定是奇数，因此n的素因子为6k+1和6k-1的形式。若n没有形如6k-1的素因子，则n的素因子都为6k+1的形式，那么n的形式也一定是6k+1，与n的形式为6k-1矛盾。因此，n必有一个形如的素因子。

假设形如的素数有有限个，不妨设为，令



则M必有一个形如6k-1的素因子q，由于形如的素数有有限个，因此q必为中的1个，因而有q|M， ，即q|1，矛盾。所以形如的素数有无穷多个。

1. 若，则。

证明：设，则由，，可知，又因为，根据整除的性质有，因此有，即。同理可证。

1. 设是正整数，且有整数使得。证明：

（1）；（2）。

证明：由可知

（1）设m为a，b的任意公倍数即*a*|m，b|m。存在整数k使得m=ak。由b|m，可知b|ak，又a，b互素，由推论1.2.2可知b|k。因此存在整数t使得k=bt，所以m=abt。故ab|m。由此可知ab是a，b的公倍数中的最小正整数，即[*a*，b]=ab。

（2）很显然。下证。

令，则，且，而，所以。根据整除性质，。因此。

综上，

1. 判断以下结论是否成立，对的给出证明，错的举出反例。

（1）若，则；

**答：错。提示：**a=6，b=8，c=10

（2）若，则；

**答：正确。提示：**左右互相整除。

**证明：**



（3）若，则；

**答：错。提示：**d=4，a=8，b=10

（4）若，则；

**答：正确。**

**证明：**设。，由可知，，因此有，。因此有。

（5）若，则；

**答：错误。**例如，则有，而。

（6）若，则；

**答：正确。**

证明：，则，。因为，所以，有。因此有，即有。

（7）；

**答：正确。**

证明：设，，则



所以

（8）；

略。

（9）；

略。

（10）；

略。

（11）若，则；

答：不正确。例如d=13，a=5，，但是。

（12）若，则。

答：正确。

证明：。

1. 设。证明：。

证明：令，，

显然有，又，所以，因此有。

反之，设，，由可知，，所以。又，所以。

综上，，即。

1. 用扩展的欧几里得算法求以下数组的最大公约数，并把它表为这些数的整系数线性组合:

（1）1819,3587；（2）2947,3997；（3）-1109,4999。

（1）1819,3587

3587=1×1819+1768 17=51-1×（1768-34×51）

1819=1×1768+51 =-1×1768+35×51

1768=34×51+34 =-1×1768+35×（1819-1×1768）

51=1×34+17 =-36×1768+35×1819

34=2×17 =-36×（3587-1×1819）+35×1819

（1819,3587）=17 =-36×3587+71×1819

(1819,3587)= -36×3587+71×1819

(2)2947,3997

3997=1×2947+1050 7=35-1×（203-5×35）

2947=2×1050+847 =118×2947-87×3997

1050=1×847+203 （2947,3997）=118×2947-87×3997

847=4×203+35

203=5×35+28

35=1×28+7

28=4×7

(2947,3997)=7

(3)-1109,4999

4999=4×1109+563 1=17-8×（547-32×17）

1109=1×563+546 =522×4999-2353×1109

563=1×546+17 (-1109,4999) =522×4999-2353×1109

546=32×17+2

17=8×2+1

(-1109,4999)=1